Hecho por Tomás Jarufe · tjarufe@usm.cl · https://tomasjarufe.site/

Certamen 3
Ecuaciones Diferenciales Elementales (MAT00325)
Semestre 2026-2

Certamen simulado

Duración: 90 minutos. Sin calculadora ni apuntes. Puntaje total: 100 puntos.

Problema 1. (25 puntos) Una masa unida a un resorte, sin amortiguamiento, está en reposo en su posición de equilibrio. En $t = 0$ se le aplica una fuerza constante, que se apaga en el instante $t = a > 0$. El movimiento se modela por

$$y''(t) + y(t) = 1 - H(t-a), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{1}$$

donde $H(t-a)$ es la función escalón de Heaviside.

(a) **(18 puntos)** Determine la solución del problema de valor inicial (1).

(b) **(7 puntos)** Determine el menor valor de $a > 0$ de modo que el sistema quede en reposo a partir del instante a.

Problema 2. (25 puntos) En un circuito RLC en serie con $L = 1$, $R = 2$ y $C = 1$, la corriente $i(t)$ satisface

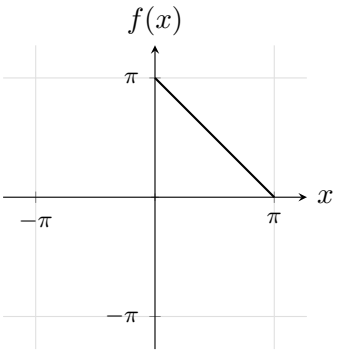
$$i'(t) + 2\,i(t) + \int_0^t i(\tau)\,d\tau = H(t-1), \qquad i(0) = 1,$$

es decir, en $t = 1$ se conecta una fuente de voltaje constante igual a 1.

(a) **(20 puntos)** Utilizando la transformada de Laplace, determine $i(t)$.

(b) **(5 puntos)** Calcule $\lim_{t\to\infty} i(t)$ e interprete.

Problema 3. (20 puntos) Considere la función f definida originalmente solo en el intervalo $[0, \pi]$, cuya gráfica se presenta a continuación:



(a) **(12 puntos)** Bosqueje la **extensión impar** de f al intervalo $[-\pi, \pi]$ y determine su serie de Fourier.

(b) **(4 puntos)** ¿A qué valor converge la serie en $x = 0$? Explique por qué no coincide con $f(0) = \pi$.

(c) **(4 puntos)** Utilizando la identidad de Parseval, demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problema 4. (30 puntos) Una cuerda de largo π, fija en sus extremos y en posición recta, se golpea en $t = 0$ de modo que su velocidad inicial es la función f del Problema 3. Su desplazamiento $u(x, t)$ satisface

$$\begin{cases} u_{tt} = 4\, u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \pi - x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(a) **(15 puntos)** Usando separación de variables, determine los valores y funciones propias del problema, analizando los casos $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ y $\alpha > 0$.

(b) **(10 puntos)** Determine $u(x, t)$. Puede usar el resultado del Problema 3.

(c) **(5 puntos)** Muestre que $u(x, \pi) = 0$ y $u_t(x, \pi) = \pi - x$. ¿Qué concluye sobre el movimiento de la cuerda?

Pauta

Problema 1. (25 puntos)

(a) Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados, con

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y(s), \qquad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad \mathcal{L}\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s},$$

se obtiene

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} - e^{-as}\,\frac{1}{s(s^2+1)}.$$

Fracciones parciales. Como s^2+1 es irreducible,

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \quad\Longrightarrow\quad 1 = A(s^2+1) + (Bs+C)s.$$

Con $s=0$: $A=1$. Con $s=1$: $1 = 2+B+C$, es decir $B+C=-1$. Con $s=-1$: $1 = 2+B-C$, es decir $B-C=-1$. De la segunda, $C = B+1$; reemplazando en la primera, $2B+1=-1$, así que $B=-1$ y $C=0$. Luego

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t.$$

Usando el segundo teorema de traslación, $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}G(s)\} = H(t-a)\,g(t-a)$:

$$y(t) = 1 - \cos t - H(t-a)\big(1 - \cos(t-a)\big).$$

Equivalentemente, en forma por tramos:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & 0 \le t < a, \\ \cos(t-a) - \cos t, & t \ge a. \end{cases}$$

Verificación. En el primer tramo, $y'' + y = \cos t + 1 - \cos t = 1$; en el segundo, $y'' + y = 0$. Además $y(0) = 0$ e $y'(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$.

(b) Se requiere $y(t) = 0$ para todo $t \ge a$. Desarrollando $\cos(t-a) = \cos t\cos a + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} a$:

$$y(t) = (\cos a - 1)\cos t + \operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} t = 0 \qquad \text{para todo } t \ge a.$$

Una combinación de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ es idénticamente nula solo si ambos coeficientes son 0:

$$\cos a = 1, \qquad \operatorname{sen} a = 0 \qquad\Longrightarrow\qquad a = 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

El menor valor es $a = 2\pi$.

Interpretación. Mientras actúa la fuerza, el equilibrio es $y=1$ y la masa oscila alrededor de él con período 2π. En $t = 2\pi$ completa una oscilación y vuelve a $y=0$ con velocidad 0. Si en ese instante se apaga la fuerza, el equilibrio pasa a ser $y=0$ y la masa ya está ahí en reposo, así que no se mueve más.

Problema 2. (25 puntos)

(a) Sea $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}(s)$. Usando

$$\mathcal{L}\{i'(t)\} = sI(s) - i(0) = sI(s) - 1, \qquad \mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{I(s)}{s}, \qquad \mathcal{L}\{H(t-1)\} = \frac{e^{-s}}{s},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} sI - 1 + 2I + \frac{I}{s} &= \frac{e^{-s}}{s} \\ I\,\frac{s^2+2s+1}{s} &= 1 + \frac{e^{-s}}{s} \\ I(s) &= \frac{s}{(s+1)^2} + e^{-s}\,\frac{1}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Fracciones parciales.

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad s = A(s+1) + B.$$

Con $s=-1$: $B=-1$. Con $s=0$: $0 = A + B$, así que $A = 1$.

Antitransformar. Por el primer teorema de traslación, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = t\,e^{-t}$ (pues $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$), y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$. Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\} = e^{-t} - t\,e^{-t} = (1-t)\,e^{-t}.$$

Para el término con e^{-s} se usa el segundo teorema de traslación:

$$i(t) = (1-t)\,e^{-t} + H(t-1)\,(t-1)\,e^{-(t-1)}.$$

En forma por tramos:

$$i(t) = \begin{cases} (1-t)\,e^{-t}, & 0 \le t < 1, \\ (1-t)\,e^{-t} + (t-1)\,e^{-(t-1)}, & t \ge 1. \end{cases}$$

Verificación. $i(0) = 1$. Para $0 \le t < 1$: $i' = (t-2)e^{-t}$ y $\int_0^t (1-\tau)e^{-\tau}d\tau = te^{-t}$, así que $i' + 2i + \int_0^t i = (t - 2 + 2 - 2t + t)e^{-t} = 0$.

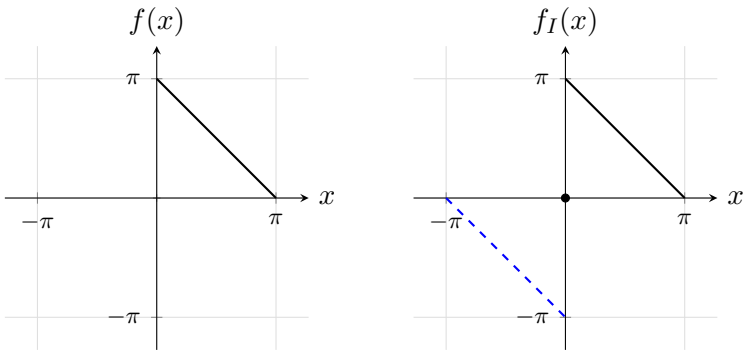
(b) Como $t\,e^{-t} \to 0$ y $e^{-t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, ambos términos tienden a 0:

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = 0.$$

Interpretación. Con una fuente constante, el condensador se carga hasta igualar el voltaje de la fuente y después no deja pasar corriente: la corriente se extingue. La raíz doble $s = -1$ indica que lo hace sin oscilar.

Problema 3. (20 puntos)

(a) La función original es $f(x) = \pi - x$ en $[0, \pi]$. Su extensión impar es $f_I(x) = -f(-x) = -\pi - x$ en $[-\pi, 0)$:



Al ser una función impar, su serie de Fourier contiene únicamente senos:

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0 \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Calculamos b_n mediante integración por partes, con $u = \pi - x$, $dv = \operatorname{sen}(nx)\,dx$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\operatorname{sen}(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{(\pi - x)\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left(0 + \frac{\pi}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\Big[\operatorname{sen}(nx)\Big]_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de la extensión impar viene dada por

$$f_I(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\operatorname{sen}(nx).$$

(b) En $x = 0$ todos los términos valen $\operatorname{sen} 0 = 0$, así que la serie converge a 0. Esto es consistente con el teorema de convergencia: la extensión impar tiene un salto en $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f_I(x) = \pi, \qquad \lim_{x\to 0^-} f_I(x) = -\pi,$$

y en un salto la serie converge al promedio de los límites laterales, $\frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$. Por eso no coincide con $f(0) = \pi$.

(c) La identidad de Parseval es

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_I(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Como f_I^2 es par,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_I^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi-x)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Por otro lado, $\sum b_n^2 = \sum \frac{4}{n^2}$. Entonces

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problema 4. (30 puntos)

(a) Se buscan soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Reemplazando, $XT'' = 4X''T$, y separando:

$$\frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\alpha.$$

Las condiciones de borde dan $X(0)T(t) = 0$ y $X(\pi)T(t) = 0$; como no se busca $T \equiv 0$, se tiene $X(0) = X(\pi) = 0$. Resolvemos

$$X'' + \alpha X = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Caso $\alpha < 0$, $\alpha = -\mu^2$ con $\mu > 0$. Las raíces son $r = \pm\mu$ y $X = c_1e^{\mu x} + c_2e^{-\mu x}$. $X(0) = c_1 + c_2 = 0$, así que $c_2 = -c_1$. $X(\pi) = c_1\left(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}\right) = 0$, y como $e^{\mu\pi} > e^{-\mu\pi}$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Solo la solución trivial.

Caso $\alpha = 0$. $X'' = 0$, $X = c_1x + c_2$. $X(0) = c_2 = 0$ y $X(\pi) = c_1\pi = 0$, así que $c_1 = 0$. Solo la solución trivial.

Caso $\alpha > 0$, $\alpha = \mu^2$ con $\mu > 0$. Las raíces son $r = \pm i\mu$ y $X = c_1\cos(\mu x) + c_2\,\mathrm{sen}(\mu x)$. $X(0) = c_1 = 0$. $X(\pi) = c_2\,\mathrm{sen}(\mu\pi) = 0$, y para $c_2 \neq 0$ se necesita $\mathrm{sen}(\mu\pi) = 0$, es decir $\mu = n$.

Los valores y funciones propias son

$$\alpha_n = n^2, \qquad X_n(x) = \mathrm{sen}(nx), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) *Parte temporal.* $T'' + 4n^2T = 0$, con raíces $\pm 2ni$:

$$T_n(t) = A_n\cos(2nt) + B_n\,\mathrm{sen}(2nt).$$

Superposición.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n\cos(2nt) + B_n\,\mathrm{sen}(2nt)\big)\,\mathrm{sen}(nx).$$

Posición inicial. $u(x,0) = \sum A_n\,\mathrm{sen}(nx) = 0$. Es una serie de senos igualada a la función 0, así que los A_n son los coeficientes de Fourier de 0: $A_n = 0$.

Velocidad inicial. Derivando en t y evaluando en $t = 0$:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\,B_n\,\mathrm{sen}(nx) = \pi - x.$$

Es una serie de senos en $(0,\pi)$ igualada a $\pi - x$, así que los $2nB_n$ son los coeficientes de Fourier de senos de $\pi - x$, es decir, los b_n de la extensión impar calculados en el Problema 3:

$$2n\,B_n = \frac{2}{n} \quad \Longrightarrow \quad B_n = \frac{1}{n^2}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2nt)\,\operatorname{sen}(nx)}{n^2}}$$

(c) En $t = \pi$: $\operatorname{sen}(2n\pi) = 0$ y $\cos(2n\pi) = 1$ para todo n. Entonces

$$u(x,\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi)\operatorname{sen}(nx)}{n^2} = 0,$$

$$u_t(x,\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\cos(2n\pi)\operatorname{sen}(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\operatorname{sen}(nx) = \pi - x,$$

usando la serie del Problema 3 (que converge a $\pi - x$ en $0 < x < \pi$).

Conclusión. En $t = \pi$ la cuerda está otra vez recta y con la misma velocidad que en $t = 0$: está exactamente en el estado inicial. Por lo tanto, el movimiento se repite y es periódico de período π. Esto se debe a que todos los modos tienen frecuencia $2n$, múltiplo de la del primero.